Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 14 — 1. Dezember 2022

Aufgabe 1: *(3+2 Punkte)* Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Zeige, dass jede Teilmenge $U \subset X$ präkompakt ist, falls X präkompakt ist.

(b) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *relativ kompakt*, falls ihr Abschluss $\overline{U} \subset X$ kompakt ist. Zeige, dass eine relativ kompakte Teilmenge $U \subset X$ stets präkompakt ist.

Aufgabe 2: *(1 Punkt)* Zeige, dass $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$ *nicht* kompakt in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist.

Aufgabe 3: *(2+2 Punkte)* Betrachte die Abbildung $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$d(x,y) := \begin{cases} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \\ \left|\frac{1}{x}\right| & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y = 0 \\ \left|\frac{1}{y}\right| & \text{falls } x = 0 \text{ und } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases} \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeige, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeige, dass $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$ kompakt in $(\mathbb{R}, d)$ ist.

Ausgabedatum: 1. Dezember 2022 **Abgabetermin:** 5. Dezember 2022, 10:00 Uhr.